Tentamen Meetkunde

11 april, 2010, 9–12 uur

N.B.: dit is een open-boek-tentamen

Opgave 1 (20 pt.)
Laat $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ een unit-speed kromme zijn met constante positieve kromming κ en constante torsie τ. Hierbij is $I \subset \mathbb{R}$ een gesloten interval. Druk de kromming en torsie van de kromme $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, gegeven door $\beta(s) = \alpha'(s)$, uit in κ en τ.

Opgave 2 (20 pt.)
Laat $\alpha(s) = (x_1(s), y_1(s), 0)$ en $\beta(t) = (x_2(t), y_2(t), 0)$ naar booglengte geparametrizeerde krommen zijn in het xy–vlak. Laat het oppervlak S geparametriseerd zijn door

$$\mathbf{x}(s,t) = \alpha(s) + x_2(t)\, N(s) + y_2(t)\, U_3,$$

waarbij $N(s)$ de normaal van α is, en U_3 het eenheidsvectorveld in de z-richting.

1. Bewijs dat $\mathbf{x}$ regulier is als $1 - x_2(t)\kappa_\alpha(s) \neq 0$ voor alle s, t. Hierbij is $\kappa_\alpha(s)$ de kromming van α.

2. Bereken de Gauß-kromming $K(s,t)$ van S in het punt $\mathbf{x}(s,t)$.

3. Als $\kappa_\alpha(s) = 0$ of $\kappa_\beta(t) = 0$, dan is $K(s,t) = 0$. Bewijs dit, en laat zien dat het omgekeerde niet hoeft te gelden.

Opgave 3 (25 pt.)
Gegeven is een oppervlak S in $\mathbb{R}^3$.

1. Als S een lijn bevat, dan is deze lijn een asymptotische kromme van S. Toon dit aan.

In de rest van de opgave is S de eenbladige omwentelingshyperboloïde gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, en is p het punt $(1, 0, 0)$ van S.

2. Toon aan dat de hoofdkrommingen van S in p gelijk zijn aan -1 en 1, en bepaal de beide kromtelijnen van S door p.

3. Bepaal de beide asymptotische richtingen van S in p, en de bijbehorende asymptotische krommen van S door p.

4. Wat zijn de asymptotische krommen door een willekeurig punt van S?

Z.O.Z.

Opgave 4 (25 pt.)
Laat $\mathbf{x}(u, v)$ een parametrisering zijn van een Riemanns oppervlak met $E = 1$ en $F = 0$.

1. Toon aan dat $\{E_1, E_2\}$, met $E_1 = \mathbf{x}_u$ en $E_2 = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\mathbf{x}_v$, een orthonormaal frame-field is.

2. Toon aan dat de duale 1-vormen ϑ_1 en ϑ_2 van dit frame-field gegeven worden door $\vartheta_1 = du$ en $\vartheta_2 = \sqrt{G}\,dv$.

3. Bepaal de connectievorm ω_{12}.

4. Toon aan dat de Gauß-kromming gegeven wordt door

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

5. Toon aan dat de krommen $u \mapsto \mathbf{x}(u, v_0)$ (met v_0 vast) geodeten zijn.

$K = \frac{-\sqrt{G}''}{\sqrt{G}}$ lemma 7.3

$\frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$

$K = \frac{LN - M^2}{G}$